Relasi dan Fungsi
Bagian 2

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Relasi Inversi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R \}$$

Contoh 17. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

maka kita peroleh

$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengkombinasikan Relasi

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 18. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$ dan $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Contoh 19. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Komposisi Relasi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

  $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk beberapa $b \in B$, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S\ \}$

Contoh 20. Misalkan

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

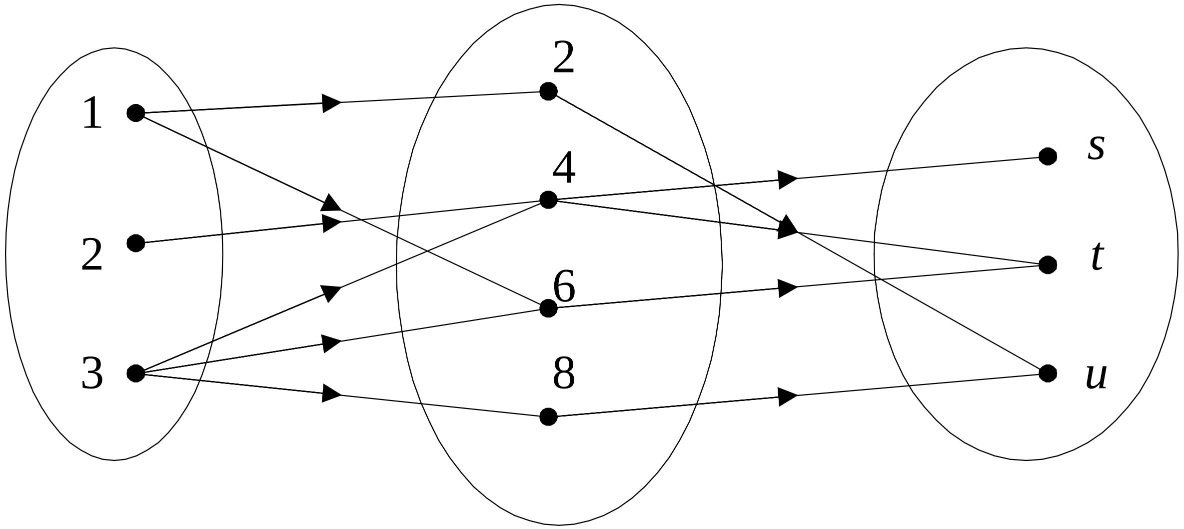
$$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan $\{s, t, u\}$.

Maka komposisi relasi *R* dan *S* adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) \}$$

Komposisi relasi *R* dan *S* lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



- Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

Contoh 21. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \, . \, M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- R^n menyatakan komposisi relasi dengan dirinya sendiri sebanyak n kali:

$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R$ (sebanyak n kali)

dan

$$M_{R^n} = M_R^{[n]}$$

- Oleh karena

$R^{n+1} = R^n \circ R$

maka

$M_{R^{n+1}} = M_R \cdot M_R^{[n]}$ (catatan: $M_R \cdot M_R^{[n]} = M_R^{[n]} \cdot M_R$)

Relasi n-ary

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.

- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener).

- Jika n = 2, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata.

- Misalkan A_1, A_2, …, A_n adalah himpunan. Relasi *n-ary* R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

- Himpunan A_1, A_2, …, A_n disebut daerah asal relasi dan n disebut **derajat**.

Contoh 22. Misalkan

NIM = {13598011, 13598014, 13598015, 13598019,
13598021, 13598025}

$Nama$ = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}

$MatKul$ = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data,
Arsitektur Komputer}

$Nilai$ = {A, B, C, D, E}

Relasi MHS terdiri dari 5-tupel (NIM, $Nama$, $MatKul$, $Nilai$):

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

MHS = {(13598011, Amir, Matematika Diskrit, A),
(13598011, Amir, Arsitektur Komputer, B),
(13598014, Santi, Arsitektur Komputer, D),
(13598015, Irwan, Algoritma, C),
(13598015, Irwan, Struktur Data C),
(13598015, Irwan, Arsitektur Komputer, B),
(13598019, Ahmad, Algoritma, E),
(13598021, Cecep, Algoritma, A),
(13598021, Cecep, Arsitektur Komputer, B),
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B),
(13598025, Hamdan, Algoritma, A, B),
(13598025, Hamdan, Struktur Data, C),
(13598025, Hamdan, Ars. Komputer, B)
}

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

- Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel.

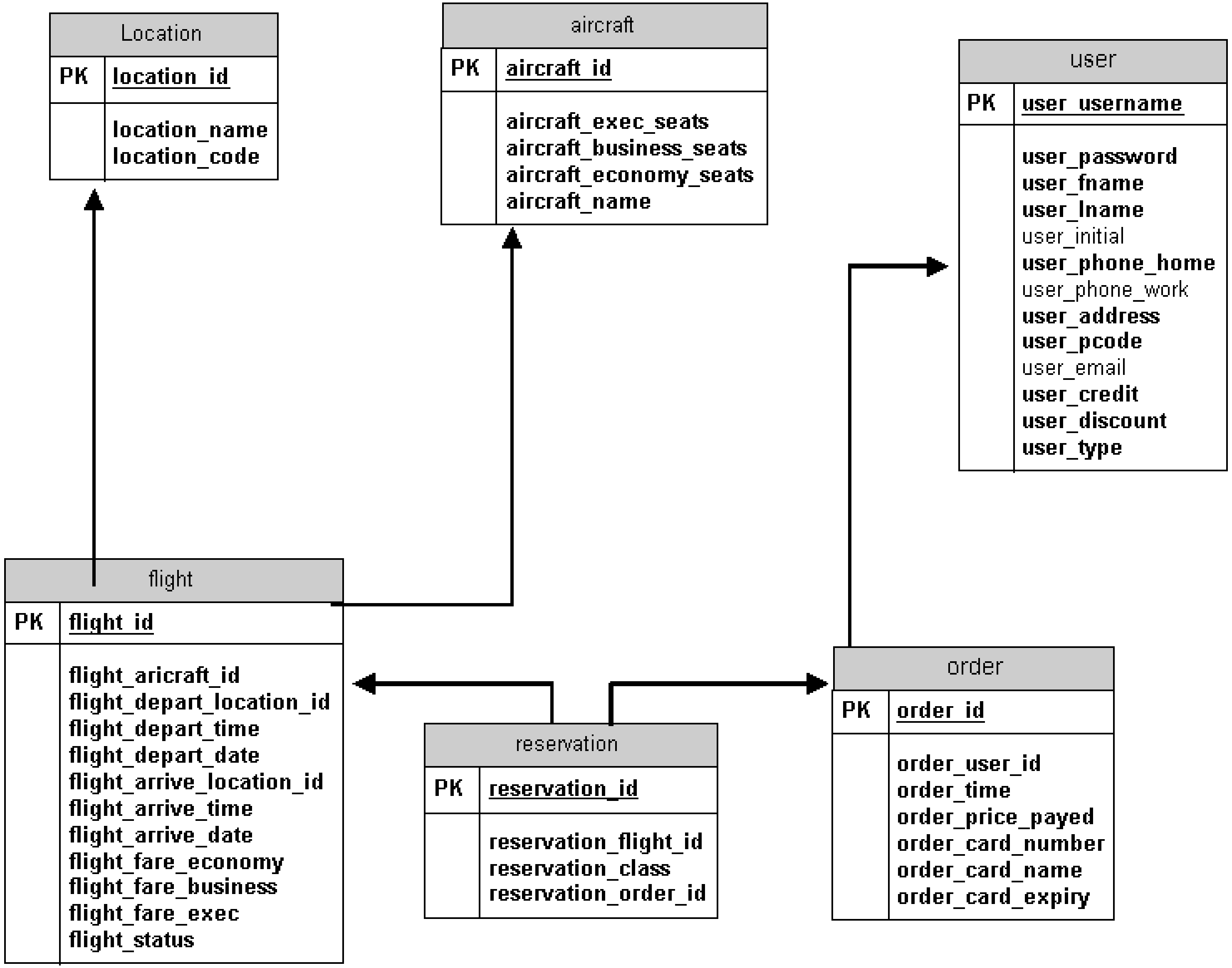
- Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*).

- Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.

- Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**.

- Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.

Contoh basis data relasional:



- Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.

- Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.

- Secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.
-
- Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).

- Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.

- Contoh *query*:
  "tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit"
  "tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015"
  "tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil"

- *Query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.

- Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

Seleksi

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.

Operator: σ

Contoh 23. Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul=''Matematika Diskrit''}}\ (\text{MHS})$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)

Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.

Operator: π

Contoh 24. Operasi proyeksi

$$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}} \text{ (MHS)}$$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$$\pi_{\text{NIM, Nama}} \text{ (MHS)}$$

menghasilkan Tabel 3.6.

Tabel 3.5

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 3.6

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

Join

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.

Operator: τ

Contoh 25. Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*

$$\tau_{\text{NIM, Nama}}(\text{MHS1, MHS2})$$

menghasilkan Tabel 3.9.

Tabel 3.7

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 3.8

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statisitik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 3.9

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

SQL

- Bahasa khusus untuk *query* di dalam basisdata disebut *SQL* (*Structured Query Language*).

- Bahasa ini dirancang agar dapat merealisasikan *query* abstrak yang sudah dijelaskan. Misalnya,

SELECT NIM, Nama, MatKul, Nilai
FROM MHS
WHERE MatKul = 'Matematika Diskrit'

adalah bahasa *SQL* yang bersesuaian untuk *query* abstrak

$$\sigma_{Matkul=\text{"Matematika Diskrit"}}\ (MHS)$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A)
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B).

Fungsi

- Misalkan *A* dan *B* himpunan. Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*.

- Jika *f* adalah fungsi dari *A* ke *B* kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

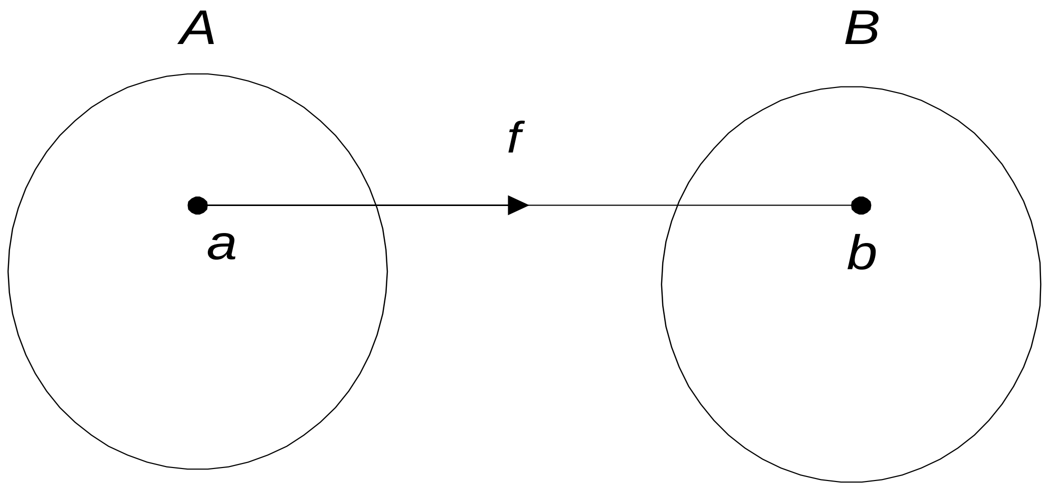
  yang artinya *f* **memetakan** *A* ke *B*.

- *A* disebut **daerah asal** (*domain*) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari *f*.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen *a* di dalam *A* dihubungkan dengan elemen *b* di dalam *B*.

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.

- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  1. Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.

  2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.

  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

  3. Kata-kata
     Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

  4. Kode program (*source code*)
     Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
   if x < 0 then
      abs:=-x
   else
      abs:=x;
end;
```

Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 30. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

Contoh 31. Misalkan *A* adalah himpunan mahasiswa di ITB. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan *A*?

(i) Setiap mahasiswa memetakan NIM (Nomor Induk Mahasiswa).
(ii) Setiap mahasiswa memetakan nomor *handphone*-nya.
(iii) Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya.
(iv) Setiap mahasiswa memetakan anaknya.

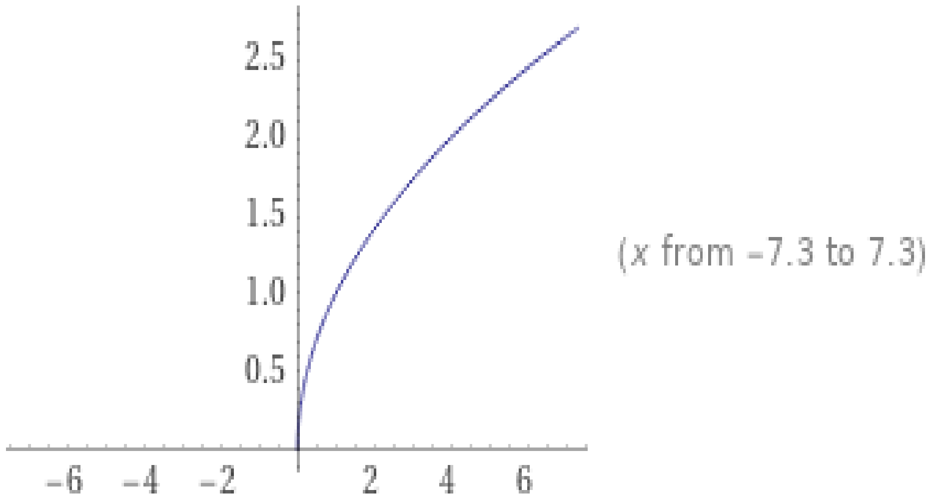
<u>Jawaban</u>:

(i) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai satu buah NIM.
(ii) Tidak, karena ada mahasiswa yang mempunyai lebih dari satu nomor HP atau tidak mempunyai HP sama sekali.
(iii) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai 1 orang dosen wali.
(iv) Tidak, jika ada mahasiswa yang belum menikah.

Contoh 32. Misalkan f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = \sqrt{x}$. Apakah f sebuah fungsi? Mengapa?

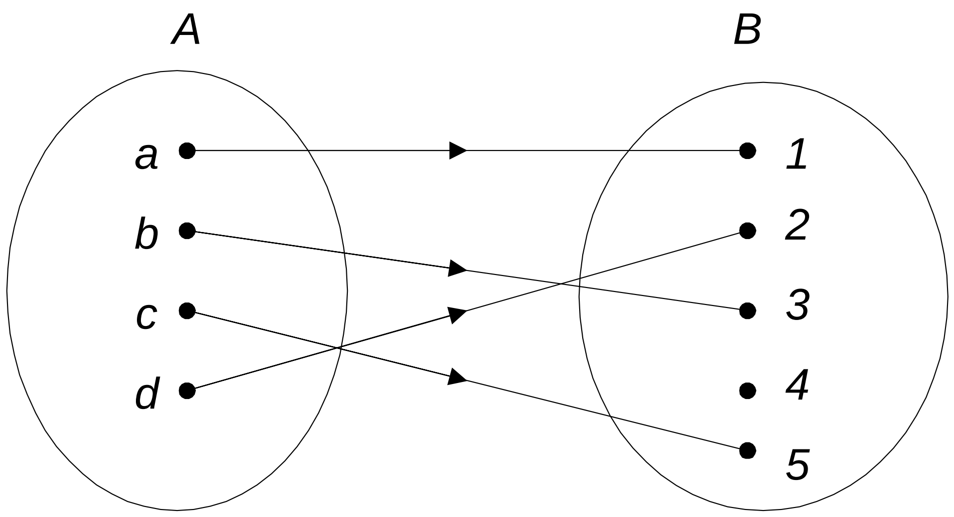
Jawaban:

- Persamaan $f(x) = \sqrt{x}$ bukanlah sebuah fungsi di dalam himpunan bilangan riil, karena tidak semua nilai x di dalam **R** dipetakan oleh f ke **R**. Relasi f hanya terdefinisi untuk nilai-nilai $x \geq 0$.



- Namun, jika daerah asal dan daerah hasil fungsi diubah menjadi f : $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ atau diubah menjadi $f : D \to \mathbf{R}$, dalam hal ini $D = \{x \mid x \geq 0\}$, maka $f(x) = \sqrt{x}$ adalah sebuah fungsi.

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



Contoh 33. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh 34. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x – 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $–2 \neq 2$.

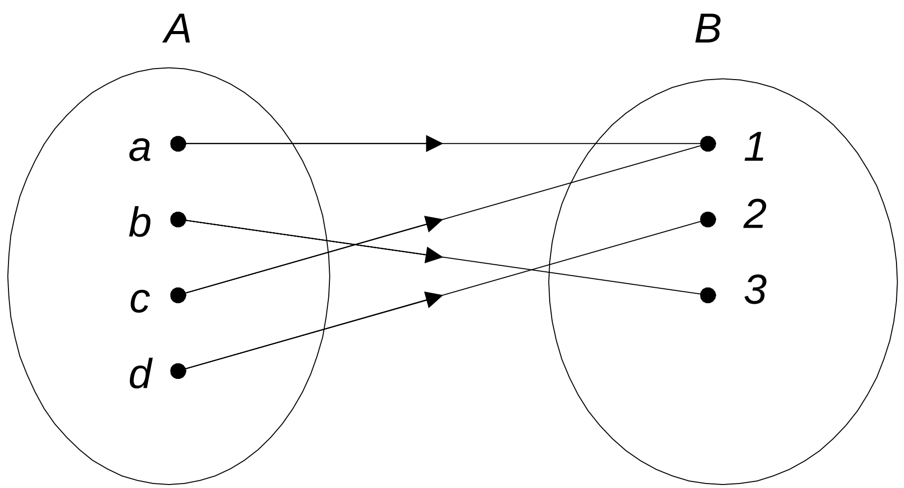
(ii) $f(x) = x – 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,

$a – 1 \neq b – 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.

- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



Contoh 35. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh 36. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

Contoh 37. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

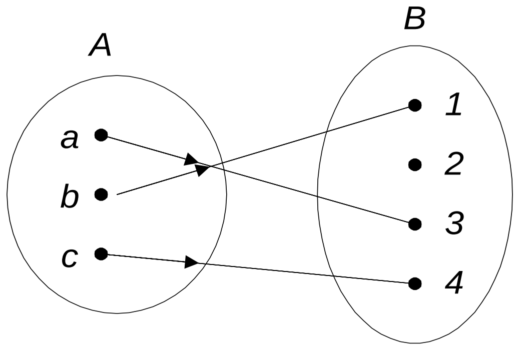
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 38. Fungsi

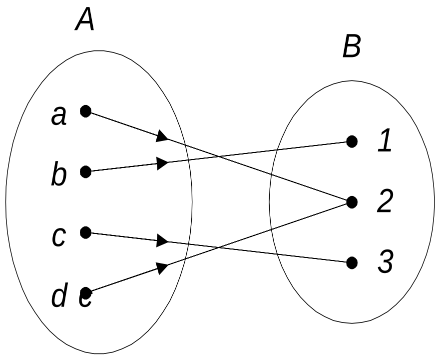
$$f(x) = x - 1$$

merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

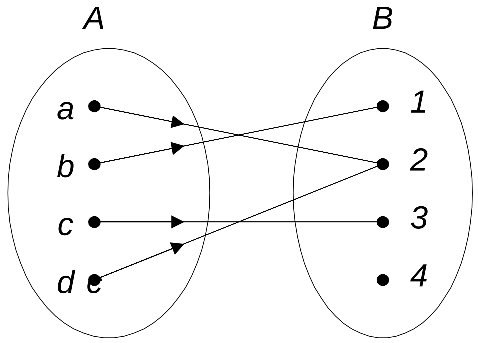
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



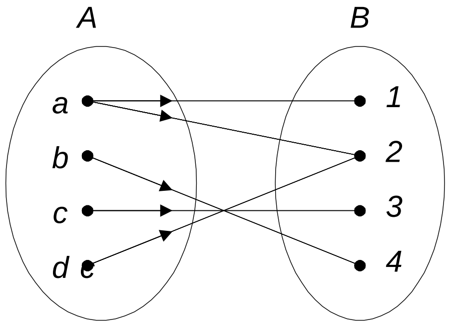
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Buka fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.

- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya.

- Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 39. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh 40. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x – 1$.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x – 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x – 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y +1$.

Contoh 41. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 34 dan 36 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 42. Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x) \}$$

Contoh 43. Diberikan fungsi $f(x) = x – 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:
(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 – 1 = x^2$.
(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x – 1) = (x –1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan *x* adalah bilangan riil, berarti *x* berada di antara dua bilangan bulat.

Fungsi *floor* dari x:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*

Fungsi *ceiling* dari *x*:

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan *x* ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan *x* ke atas.

Contoh 44. Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$	$\lceil 3.5 \rceil = 4$
$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$	$\lceil 0.5 \rceil = 1$
$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$	$\lceil 4.8 \rceil = 5$
$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$	$\lfloor -0.5 \rfloor = 0$
$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$	$\lceil -3.5 \rceil = -3$

Contoh 45. Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian *byte*, satu *byte* terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah *byte* yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah $\lceil 125/8 \rceil = 16$ *byte*. Perhatikanlah bahwa $16 \times 8 = 128$ bit, sehingga untuk *byte* yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu *byte* tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut *padding bits*).

2. Fungsi modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.

a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m

a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \le r < m$.

Contoh 46. Beberapa contoh fungsi modulo

25 mod 7 = 4
15 mod 4 = 3
3612 mod 45 = 12
0 mod 5 = 0
–25 mod 7 = 3 (sebab –25 = 7 · (–4) + 3)

3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

5. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

Fungsi Rekursif

- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh: $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n - 1) \times n = (n - 1)! \times n$.

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*

Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif.

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

- Contoh definisi rekursif dari faktorial:

  (a) basis:

  $n! = 1$, jika $n = 0$

  (b) rekurens:

  $n! = n \times (n - 1)!$, jika $n > 0$

5! dihitung dengan langkah berikut:

(1) $5! = 5 \times 4!$ (rekurens)
(2) $4! = 4 \times 3!$
(3) $3! = 3 \times 2!$
(4) $2! = 2 \times 1!$
(5) $1! = 1 \times 0!$
(6) $0! = 1$

(6’) $0! = 1$
(5’) $1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$
(4’) $2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$
(3’) $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$
(2’) $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
(1’) $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Jadi, $5! = 120$.

Contoh 47. Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n, x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x & , n = 1 \\ 2xT(n-1, x) - T(n-2, x) & , n > 1 \end{cases}$$

3. Fungsi fibonacci:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & , n > 1 \end{cases}$$